**Шар ( сфера )**

***Сферическая поверхность*** – это *геометрическое место точек*

( *т.е. множество всех точек* ) *в пространстве, равноудалённых от одной точки* O*, которая называется центром сферической поверхности* ( рис.90 ). *Радиус* AO и *диаметр* AB определяются так же, как и в окружности.

***Шар ( сфера )*** - это *тело, ограниченное сферической поверхностью.* Можно получить шар, вращая полукруг ( или круг ) вокруг диаметра. Все плоские сечения шара – *круги* ( рис.90 ). Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется *большим кругом*. Его радиус равен радиусу шара. Любые два больших круга пересекаются по диаметру шара ( AB, рис.91 ). Этот диаметр является и диаметром пересекающихся больших кругов. Через две точки сферической поверхности, расположенные на концах одного диаметра ( A и B, рис.91 ), можно провести бесчисленное множество больших кругов. Например, через полюса Земли можно провести бесконечное число меридианов.



*Объём шара в полтора раза меньше объёма описанного вокруг него цилиндра* ( рис.92 ), *а* *поверхность шара в полтора раза меньше полной поверхности того же цилиндра ( теорема Архимеда ):*



Здесь  *S шара*  и  *V шара*  -  соответственно поверхность и объём шара;

*S цил* и *Vцил  -* полная поверхность и объём описанного цилиндра.

***Части шара.*** Часть шара (сферы), отсекаемая от него какой-либо плоскостью ((ABC), рис.93 ), называется *шаровым* (*сферическим*) *сегментом*. Круг ABC называется *основанием* шарового сегмента. Отрезок  MN, перпендикуляра, проведенного из центра N круга ABC до пересечения со сферической поверхностью, называется *высотой* шарового сегмента. Точка M называется *вершиной* шарового сегмента.



Часть сферы, заключённая между двумя параллельными плоскостями (ABC)) и (DEF), пересекающими сферическую поверхность ( рис.93 ), называется *шаровым слоем*;кривая поверхность шарового слоя называется *шаровым поясом* ( *зоной* ).КругиABC и DEF – *основания* шарового пояса. Расстояние NK между основаниями шарового пояса – его *высота*. Часть шара, ограниченная кривой поверхностью сферического сегмента

( AMCB,  рис.93 ) и конической поверхностью OABC, основанием которой служит основание сегмента ( ABC ), а вершиной – центр шара O, называется *шаровым сектором*.

***Пример 1***

Определить площадь поверхности шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, у которой высота равна 9, а двугранный угол при основании 60°.



Решение. MSN — сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию. Обозначим: SO = 9 — высота пирамиды, SNO = 60°,

ОО=ОК= r — радиусы вписанного в пирамиду шара(совпадают с радиусом вписанного круга в MSN).2. Из SOK:ОK=OSsin30r=(9-r) r=3.

Sшара=4R2=36

***Пример 2***

      На поверхности шара даны три точки. Расстояния между ними *6* см, *8* см, *10* см. Радиус шара *13* см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Решение

|  |  |
| --- | --- |
| 7_5_10  |       Соединив эти точки между собой и центром шара *О*, задача свелась к нахождению высоты (*OD*) треугольной пирамиды *OABC*. Основание высоты (*D*) должно совпадать с центром окружности, описанной около треугольника *АВС*. Стороны *АВ*, *АС и ВС,* равные расстояниям между точками А, В, С, удовлетворяют теореме Пифагора 7_5_11, т.е. треугольник *АВС* – прямоугольный, и точка *D* является серединой гипотенузы *АВ*. Тогда из прямоугольного треугольника *BOD* находим *OD*   pict_1989*,OD = 12* (см). |

      Ответ: *12* см.

***Пример 3***

     Радиус шара *15* м. Вне шара дана точка *А* на расстоянии *10* м от его поверхности. Найти длину такой окружности на поверхности шара, все точки которой отстоят от точки *А* на *20* м.

Решение

|  |  |
| --- | --- |
| 7_5_12  |      Искомая окружность является окружностью основания конуса, образующие которого равны расстоянию от точки *А* до этой окружности, т.е. 20 м. Тогда в плоскости, проходящей через центр шара *О* и точку *А* рассмотрим треугольник *АВО*, где *В* – точка искомой окружности.  По условию *AD = 10* м, *OD = OB = 15* м.  Тогда *AO = AD + DO*, *AO = 25* м, *AB = 20* м. |

        Стороны треугольника *АВО* удовлетворяют теореме Пифагора , следовательно, *ABO* – прямоугольный.  – высота, проведенная из вершины прямого угла *В*.Тогда из метрических соотношений в *ABO* имеем
.

     Откуда  (м).

     Из прямоугольного треугольника  имеем

,  (м).

– радиус искомой окружности, тогда длина этой окружности .

     Ответ: *24* .

***Пример4***

     Стороны треугольника *13* см, *14* см, *15* см. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника. Радиус шара *5* см.

Решение:

|  |  |
| --- | --- |
| 7_5_01 |       Плоскость треугольника *АВС* пересекает поверхность шара по окружности, вписанной в треугольник *АВС*. Искомое расстояние – это расстояние между центром этой окружности pict_2007 и центром шара *О*. Найдем радиус этой окружности pict_2008 по формуле   pict_2009,где pict_2010 (см), pict_2011 (см). |

      Треугольник  – прямоугольный, так как  перпендикулярно плоскости треугольника *АВС*, следовательно и любой прямой, лежащей в этой плоскости. Тогда , где *OD* – радиус шара.  (см).

     Ответ: *3* см.

***Пример 5***

     Полукруг радиуса *R*, разделенный двумя радиусами на три равные части, вращается вокруг диаметра. Найти объемы тел, полученных от вращения каждой части.

Решение

|  |  |
| --- | --- |
| 7_5_02  |       По условию части *ОВС*, *OCD* и *OAD* равны, следовательно, центральные углы *BOC*, *COD* и *DOA* равны и составляют *60°*. Из прямоугольного треугольника *OMC* находим *ОМ*  pict_2021, тогда pict_2022.        Аналогично pict_2023, *MN = R*.  *BM* и *AN* – высоты равных шаровых сегментов.  |

      Тогда объемы шаровых секторов, образованных вращением равных круговых секторов *ОВС* и *OAD*, найдем по формуле

*V* сект ,

*V* сект .

      Объем шарового сектора *OCD* найдем как разность между объемом шара и объемами найденных секторов *ОВС* и *AOD*

*.*

      Ответ: , .

***Пример 6***

      Шар образован вращением полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр. При этом поверхность, образованная вращением некоторой хорды, один конец которой совпадает с концом данного диаметра, разбивает шар на две равные по объему части. Найти косинус угла между этой хордой и диаметром.

Решение

|  |  |
| --- | --- |
| 7_5_03  |      Объем одной из частей состоит из объема конуса и объема шарового сегмента. Пусть *AC = a*, *AB = 2R* и *CAB =* .  Тогда из прямоугольного треугольника *АВС* находим *a = 2R cos* . Из прямоугольного треугольника *ACD* находим *AD* и *DC*  pict_2034*, DC = a sin*  *= R sin 2**.*  Тогда pict_2036. *AD* – высота конуса, *BD* – высота шарового сегмента, *DC* – радиус основания конуса.  |

      Подставив найденные величины в формулы объемов конуса и шарового сегмента, получим

*V* кон ,

*V* сегм .

Согласно условию задачи *V* кон + *V* сегм *V* ш, т.е.

,

откуда .

      После преобразования имеем

, ,

откуда , .

      Ответ: .

***Пример 7***

      Шар радиуса *r* освещается точечным источником света. Его тень на стене представляет собой круг радиуса *R*. Найти расстояние источника света от поверхности шара, если освещенная часть вдвое меньше тени.

Решение

|  |  |
| --- | --- |
| 7_5_04  |       Освещенная часть шара представляет собой сегментную поверхность *S* сегм *= 2* *rH*, где *H = KD*. По условию задачи pict_2048, откуда pict_2049. |

      Дальше сведем задачу к планиметрической, проведя через точку *А* плоскость, перпендикулярную плоскости проекции. Очевидно, она проходит через центр шара. Тогда

*OK = OD* *KD*, .

      Пусть *AD = x*, тогда из метрических соотношений в прямоугольном треугольнике *ABD* имеем  или , откуда .

     Ответ: .

**Задачи на комбинации тел.**

**(для самостоятельного решения)**

**Срок сдачи 05.05.2008 года для 11 Б класса.**

 Задача по пункту соответствует порядковому номеру по классному журналу.

 Желаю удачи!!!

1. В сферу вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого составляет $\frac{2}{5}$ площади сферы. Найдите отношение высоты цилиндра к диаметру его основания.
2. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их объёмов и отношение площадей их поверхностей.
3. В конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади основания конуса. Найдите угол $α$ наклона образующей конуса к плоскости его основания.
4. В сферу вписан конус, радиус основания которого равен $\frac{1}{2}$ радиуса сферы. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
5. В шар радиуса R вписан конус. Объём конуса составляет $\frac{1}{4}$ объёма шара. Найдите высоту конуса.
6. Около сферы радиуса r описан конус, высота которого равна h. Найдите площадь полной поверхности конуса.
7. В конус вписана сфера. Площадь сферы составляет $\frac{2}{3}$ площади боковой поверхности конуса. Найдите образующую конуса, если радиус его основания равен R.
8. Около шара радиуса r описан конус, объём которого в два раза больше объёма шара. Найдите высоту конуса.
9. В конус вписан шар. Докажите, что отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно отношению их объёмов.
10. В конус вписан шар, площадь поверхности которого равна площади основания конуса. Какую часть объёма конуса составляет объём шара?
11. В конус вписан шар и через их линию касания проведена плоскость. Найдите отношение объёма отсечённого конуса к объёму данного, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 2$α$.
12. Около сферы описан усечённый конус, образующая которого составляет с большим основанием угол $α$. Площадь сферы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.
13. Площадь сферы составляет $\frac{3}{4}$ площади поверхности описанного около сферы усечённого конуса. Найдите радиусы оснований усечённого конуса и радиус сферы, если образующая усечённого конуса равна L.
14. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого равна R$√2$, а угол наклона её к плоскости нижнего основания равен $α$. Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса.
15. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол $β$. Угол между диагоналями в осевом сечении конуса, обращённый к основанию, равен $α$. Найдите площадь осевого сечения конуса.
16. В сферу радиуса R вписан усечённый конус, высота которого равна h. Диагонали осевого сечения конуса перпендикулярны. Найдите объём усечённого конуса. Имеет ли задача решение, если а) h = $\frac{2}{3}$R, б) h = $\frac{3}{2}$R?
17. В шар вписан цилиндр, у которого радиус основания относится к высоте как . Определить полную поверхность этого цилиндра, если поверхность шара равна S.
18. В конус, у которого радиус основания r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом , вписан шар. Найти объем шара.
19. Металлический цилиндр с диаметром основания d=4 см и высотой h=4 см, переплавлен в шар. Вычислить объем и площадь поверхности шара.
20. В правильной четырехугольной пирамиде высота h, боковое ребро b. Найти объем описанного шара.
21. В шар объемом  вписан цилиндр, образующая которого видна из центра шара под углом . Найти объем цилиндра.
22. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна высоте и равна 4 м. Найти объем описанного шара.
23. Найти полную поверхность цилиндра, в осевом сечении которого квадрат, если его боковая поверхность равна .
24. Высота конуса 8 м, образующая 10 м. Чему равна поверхность и объем вписанного в него шара.
25. В куб, объем которого , вписан шар. Определить объем и площадь поверхности шара.
26. В конус вписан шар объемом V. Найти длину образующей конуса, если она составляет с плоскостью основания конуса угол .
27. Найти отношение площади поверхности и объема шара к поверхности и объему вписанного в него куба.
28. Радиус шара 5 см. В шар вписан конус, радиус его основания 4 см. Найти объем конуса.